Dorel Duca
Ioan Purdea
Mihail Megan
Ovidiu Pop

MATEMATICĂ

Manual pentru clasa a XII-a

M2

Filiera teoretică
Specializare: științe sociale

Filiera tehnologică
Profilul resurse naturale și protecția mediului
Specializări: industrie alimentară, chimie industrială, protecția mediului, agricol, agromontan veterinar, silvic, prelucrarea lemnului
Profil servicii
Specializări: poștă, turism și alimentație publică, economic, administrativ

Filiera vocațional
Profilul artistic
Specializare: arhitectură
Profil militar (MI)
Specializare: științe sociale

EDITURA GIL

CUPRINS

Capitolul 1

PRIMITIVE

În acest capitol vom introduce o clasă importantă de funcții reale și anume clasa **funcțiilor care admit primitive**. Conceptul de **primitivă** leagă între ele două concepte fundamentale ale Analizei Matematice: **derivata** și **integrala**. Vom aborda probleme de natură **calitativă** privind studiul existenței primitivelor precum și de natură **calculatorie** relative la metode de calcul de primitive.

§1.1. Probleme ce conduc la noțiunea de primitivă

Exemple

1. Se consideră o bilă de masă m care cade la momentul $t_0 = 0$ de la o anumită înălțime. Se presupune că rezistența aerului este direct proporțională cu viteza bilei. Ne punem problema determinării vitezei bilei în orice moment $t \geq 0$.

În acest scop să notăm cu c factorul de proporționalitate, iar cu $v(t)$, respectiv $a(t)$, viteza și respectiv accelerația bilei la momentul t. Atunci

$$ma(t) = mg - cv(t) \text{ pentru orice } t \geq 0,$$

unde g este accelerația gravitațională.

Ținând seama că accelerația este derivata vitezei, relația precedentă devine

$$v'(t) + \frac{c}{m}v(t) = g \text{, sau } \left(v(t)e^{\frac{ct}{m}} - \frac{gm}{c}e^{\frac{ct}{m}}\right)' = 0 \text{ pentru orice } t \geq 0.$$

Utilizând consecința teoremei lui Lagrange care afirmă că o funcție derivabilă care are derivată nulă pe un interval este constantă, rezultă că există $K \in \mathbb{R}$, astfel încât

$$v(t)e^{\frac{ct}{m}} = \frac{gm}{c}e^{\frac{ct}{m}} + K \text{ pentru orice } t \geq 0,$$

de unde se deduce formula de calcul pentru $v(t)$.

2. Se consideră un mediu cu temperatură constantă $T_0 = 60^0\mathrm{C}$ în care se scufundă un corp aflat inițial la $180^0\mathrm{C}$. Se presupune că viteza de răcire a corpului la orice moment t este direct proporțională cu diferența dintre temperatura $T(t)$ a corpului şi temperatura T_0 a mediului. Ne propunem să aflăm după cât timp temperatura corpului ajunge la 90^0C, ştiind că după un minut temperatura a coborât la 120^0C.

Să notăm cu c factorul de proporționalitate. Deoarece $T(0)=180^0 > T_0 = 60^0$ şi T este o funcţie continuă, rezultă că există un interval $I=[0,t_0]$ cu $t_0>0$, inclus în mulţimea $\{t\geq 0 \mid T(t)>T_0\}$.

Prin ipoteză avem că $T'(t)=c(T_0-T(t))$, ceea ce se mai scrie şi astfel

$$\frac{T'(t)}{T_0-T(t)}=c\text{, sau } [\ln(T(t)-T_0)+ct]'=0 \quad \text{pentru orice } t\in I.$$

De aici rezultă că există $K\in\mathbb{R}$ astfel încât

$$\ln(T(t)-T_0)+ct=K \text{ pentru orice } t\in I.$$

Ţinând seama că $T(1)=120^0$, rezultă $K=c+\ln 60$ şi deci

$$\ln(T(t)-T_0)=c+\ln 60-ct.$$

Dacă $T(t_1)=90$, atunci $\ln 30=c+\ln 60-ct_1$ şi deci

$$t_1=\frac{\ln 2+c}{c} \text{ minute.}$$

În exemplele precedente ne-am confruntat cu problema determinării unor funcţii la care se cunoaşte derivata.

§1.2. Primitive. Integrala nedefinită a unei funcţii

În calculul diferenţial s-a considerat problema calculării derivatei unei funcţii derivabile date. Este posibil să inversăm această problemă în sensul schimbării rolul funcţiilor cunoscute şi calculate. Ajungem astfel la

Definiţie Fie intervalul $I\subset\mathbb{R}$ şi funcţia $f:I\to\mathbb{R}$. Spunem că funcţia f **admite primitivă pe I** dacă există o funcţie $F:I\to\mathbb{R}$ cu proprietăţile:

a) F este derivabilă pe I;

b) $F'(x)=f(x)$, pentru orice $x\in I$.

Funcţia F se numeşte **primitivă a funcţiei f**.

Observație

În cele ce urmează, vom considera că mulțimea $I \subset \mathbb{R}$ este interval.

Exemple

1. Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2$ admite primitiva $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=x^3$, deoarece F este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $F'(x)=f(x)$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

2. Funcția $f:(0,\pi]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$ admite primitiva $F:(0,\pi]\to\mathbb{R}$, $F(x)=-\cos x$, deoarece F este derivabilă pe $(0,\pi]$ și $F'(x)=f(x)$, $\forall\, x\in(0,\pi]$.

Propoziție Dacă funcția $f:I\to\mathbb{R}$ admite primitive pe I, atunci:

1) Pentru orice două primitive $F_1,F_2:I\to\mathbb{R}$ ale lui f, există o constantă $c\in\mathbb{R}$ astfel încât $F_1(x)=F_2(x)+c$, $\forall\, x\in I$.

2) Dacă $F:I\to\mathbb{R}$ este o primitivă fixată a lui f, atunci pentru o primitivă G a lui f există o constantă reală c, astfel încât $G(x)=F(x)+c$, $\forall\, x\in I$.

Demonstrație. 1) Dacă $F_1,F_2:I\to\mathbb{R}$ sunt două primitive ale lui f, atunci $F_1'(x)=F_2'(x)=f(x)$, $\forall\, x\in I$. Rezultă că există o constantă $c\in\mathbb{R}$, astfel încât

$$F_1(x)-F_2(x)=c,\ \forall\, x\in I.$$

2) Rezultă din 1).

Observații

1. Din propoziție rezultă că dacă o funcție admite o primitivă, atunci ea admite primitive.

2. Dacă funcția $f:I\to\mathbb{R}$ admite primitive pe I și funcția $F:I\to\mathbb{R}$ este o primitivă fixată a lui f, atunci toate primitivele funcției f sunt de forma $F+c$, unde c este o constantă reală arbitrară.

Definiție Fie $f:I\to\mathbb{R}$ o funcție care admite primitive pe I. Mulțimea tuturor primitivelor lui f pe I se numește **integrala nedefinită a funcției** f și se notează cu

$$\int f(x)\mathrm{d}x.$$

Operația de calculare a primitivelor unei funcții care admite primitive se numește **integrare**.

Observaţie

Conform observațiilor de mai sus, rezultă că dacă funcția $f : I \to \mathbb{R}$ admite primitive pe I şi $F : I \to \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f, atunci

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \{F + c \mid c \in \mathbb{R}\}.$$

Deci, pentru determinarea mulțimii $\int f(x)\mathrm{d}x$, adică a mulțimii primitivelor funcției f pe I, este suficient să determinăm una dintre acestea, căci oricare alta diferă printr-o constantă.

§1.3. Operaţii cu funcţii care admit primitive

Am văzut că dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcție care admite primitive pe I, atunci mulțimea primitivelor sale este o mulțime de funcții inclusă în mulțimea tuturor funcțiilor $F : I \to \mathbb{R}$.

Ne punem acum problema operațiilor cu funcții care admit primitive şi să vedem dacă este posibilă stabilirea unor rezultate analoage cu cele din calculul diferențial, unde avem, de exemplu, că derivata sumei este egală cu suma derivatelor. Pentru a extinde acest rezultat în cazul primitivelor trebuie să definim **operații cu mulțimi de funcții**.

Fie $I \subset \mathbb{R}$, I interval şi mulțimea

$$\mathcal{F}(I) = \{f \mid f : I \to \mathbb{R}\},$$

adică mulțimea funcțiilor definite pe I, cu valori reale. Pe mulțimea $\mathcal{F}(I)$ definim operațiile:

a) **adunarea funcțiilor**

$\forall\ f, g \in \mathcal{F}(I)$, **funcția sumă** a funcțiilor f şi g notată $f + g$, definită prin $f + g : I \to \mathbb{R}$, $(f + g)(x) = f(x) = g(x)$, $\forall\ x \in I$.

Facem observația că $\forall\ f, g \in \mathcal{F}(I)$, rezultă că

$$f + g \in \mathcal{F}(I).$$

b) **înmulțirea funcțiilor cu scalari**

$\forall\ \lambda \in \mathbb{R}, \forall\ f \in \mathcal{F}(I)$, **funcția produs** a funcției f cu scalarul λ notată λf, definită prin $\lambda f : I \to \mathbb{R}$, $(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$, $\forall\ x \in I$.

Avem că $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall\ f \in \mathcal{F}(I)$, rezultă că

$$\lambda f \in \mathcal{F}(I).$$

Dacă $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ sunt submulțimi nevide ale lui $\mathcal{F}(I)$, atunci definim.

$$\mathcal{G} + \mathcal{H} = \{f + g \mid f \in \mathcal{G} \text{ şi } g \in \mathcal{H}\}$$

şi

$$\lambda \cdot \mathcal{G} = \{\lambda \cdot f \mid f \in \mathcal{G}\}, \text{ unde } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dacă mulţimea $\mathcal{G}$ este formată dintr-un singur element f, $\mathcal{G}=\{f\}$, atunci mulţimea $\mathcal{G}+\mathcal{H}=\{f\}+\mathcal{H}$, o vom scrie simplificat $f+\mathcal{H}$, deci

$$f+\mathcal{H}=\{f+g \mid g\in \mathcal{H}\}.$$

Notăm cu $\mathcal{C}$ mulţimea funcţiilor constante defінte pe I, adică

$$\mathcal{C}=\{f \mid f: I\to\mathbb{R},\ f \text{ constantă pe } I\}.$$

Are loc următoarea

Propoziţie

a) $\lambda\cdot\mathcal{C}=\mathcal{C},\ \forall\lambda\in\mathbb{R}^*$;

b) $\mathcal{C}+\mathcal{C}=\mathcal{C}$.

Adică, suma a două funcţii constante este tot o funcţie constantă, iar o funcţie constantă înmulţită cu un scalar este tot o funcţie constantă.

Observaţii

1. Fie funcţia $f:I\to\mathbb{R}$, f admite primitive pe I şi fie $F_0:I\to\mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei f. Ţinând seama de ultima observaţie din paragraful §1.2 şi operaţiile cu funcţii definite în paragraful §1.3, avem că

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\{F \mid F:I\to\mathbb{R},\ F \text{ este primitivă a lui } f\} = F_0+\mathcal{C}.$$

Ţinând seama de propoziţie, avem că

$$\int f(x)\mathrm{d}x+\mathcal{C}=(F_0+\mathcal{C})+\mathcal{C}=F_0+(\mathcal{C}+\mathcal{C})=F_0+\mathcal{C},$$

deci

$$\int f(x)\mathrm{d}x+\mathcal{C}=\int f(x)\mathrm{d}x.$$

2. Dacă funcţia $f:I\to\mathbb{R}$ admite primitive pe I şi F este o primitivă a lui f, atunci

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F+\mathcal{C}$$

sau

$$\int F'(x)\mathrm{d}x=F+\mathcal{C}.$$

Teorema 1

Dacă funcţiile $f,g:I\to\mathbb{R}$ admit primitive pe I şi $\lambda\in\mathbb{R}^*$, atunci

1. funcţia $f+g$ admite primitive pe I şi

$$\int[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x+\int g(x)\mathrm{d}x.$$

2. funcţia λf admite primitive pe I şi

$$\int\lambda\cdot f(x)\mathrm{d}x=\lambda\int f(x)\mathrm{d}x.$$

Demonstrație. În demonstrație vom ține seama și de propoziția de mai sus.

1. Dacă f și g admit primitive pe I, atunci există $F, G: I \to \mathbb{R}$, derivabile pe I cu $F' = f$ și $G' = g$. Atunci suma $F + G$ este derivabilă pe I și

$$(F+G)' = F' + G' = f + g.$$

De aici rezultă că funcția $f + g$ admite primitive pe I și

$$\int [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x = F + G + \mathcal{C}.$$

Dar $\int f(x)\mathrm{d}x = F + \mathcal{C}$, $\int g(x)\mathrm{d}x = G + \mathcal{C}$, de unde

$$\int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x = (F + \mathcal{C}) + (G + \mathcal{C}) = (F + G) + (\mathcal{C} + \mathcal{C}) = F + G + \mathcal{C},$$

deci $\int [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$.

2. Dacă F este o primitivă pe I a funcției f, atunci pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}^*$, funcția λF este derivabilă pe I și

$$(\lambda F)' = \lambda F' = \lambda f,$$

ceea ce arată că funcția λf admite primitive pe I.

Avem că $\int \lambda \cdot f(x)\mathrm{d}x = \lambda F + \mathcal{C}$ și $\lambda \int f(x)dx = \lambda(F + \mathcal{C}) = \lambda F + \lambda \mathcal{C} = \lambda F + \mathcal{C}$, deci

$$\int \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\mathrm{d}x.$$

Consecință Dacă funcțiile $f, g: I \to \mathbb{R}$, admit primitive pe I și $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda^2 + \mu^2 > 0$, atunci funcția $\lambda f + \mu g$ admite primitive pe I și

$$\int [\lambda f(x) + \mu g(x)]\mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\mathrm{d}x + \mu \int g(x)\mathrm{d}x.$$

Demonstrație. Ținând seama de teoremă, avem că funcțiile λf și μg admit primitive pe I și apoi că funcția $\lambda f + \mu g$ admite primitive pe I. Atunci

$$\int [\lambda f(x) + \mu g(x)]\mathrm{d}x = \int \lambda f(x)\mathrm{d}x + \int \mu g(x)\mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\mathrm{d}x + \mu \int g(x)\mathrm{d}x,$$

adică ceea ce trebuia demonstrat.

Observație

În calculul diferențial, pentru funcții derivabile, avem că derivata sumei este egală cu suma derivatelor. Conform teoremei, pentru funcții care admit primitive, integrala sumei a două funcții este egală cu suma integralelor. Schematic, putem scrie aceste proprietăți comune derivatelor și primitivelor, astfel:

$$(f+g)' = f' + g' \text{ și } \int (f+g) = \int f + \int g\,;\ (\lambda f)' = \lambda \cdot f' \text{ și } \int \lambda f = \lambda \int f.$$

O clasă largă de funcții care admit primitive, este mulțimea funcțiilor continue. Teorema următoare dă o condiție **suficientă ca o funcție să admită primitive**.

Teorema 2	Orice funcție continuă pe un interval I, admite primitive pe I.

Observaţie

Reciproca acestei teoreme nu este adevărată, adică există funcții discontinue, dar care admit primitive.

La baza calculului de determinare a mulțimii primitivelor unei funcții care admit primitive se află cunoaşterea unora dintre acestea. Egalitățile din următorul tabel al primitivelor uzuale, se verifică imediat prin derivare.

Prezentăm aşadar mai jos

TABELUL PRIMITIVELOR UZUALE

Funcția	Mulțimea primitivelor
$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^n$ unde $n \in \mathbb{N}$	$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$f\colon I \to \mathbb{R}, f(x) = x^\alpha$ unde $I \subset (0, \infty)$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$f\colon I \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$ unde $I \subset (0, \infty)$ sau $I \subset (-\infty, 0)$	$\int \frac{dx}{x} = \ln \lvert x \rvert + C$
$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x$	$\int e^x \, dx = e^x + C$
$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = a^x$ unde $a > 0$, $a \neq 1$	$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$ unde $a \neq 0$	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ unde $a \neq 0$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C$
$f\colon I \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2 - a^2}$ unde $I \subset \mathbb{R} \setminus \{-a, a\}$, $a \neq 0$	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert + C$

$f: I \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ unde $I \subset (-\infty, -a)$ sau $I \subset (a, \infty)$, $a \neq 0$	$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + \mathcal{C}$
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x$	$\displaystyle\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + \mathcal{C}$
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos x$	$\displaystyle\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + \mathcal{C}$
$f: I \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ unde $I \subset \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + \mathcal{C}$
$f: I \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$ unde $I \subset \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + \mathcal{C}$
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ unde $a > 0$, $I \subset (-a, a)$	$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + \mathcal{C}$

PROBLEME REZOLVATE

1. Fie funcția $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 + 3\sqrt[5]{x^2} - \dfrac{5}{\sqrt[4]{x^3}}$. Să se arate că funcția f admite primitive pe $(0,\infty)$ și să se calculeze $\int f(x)\mathrm{d}x$.

Soluție

Funcția f se scrie sub forma $f(x) = 2x^3 + 3 \cdot x^{\frac{2}{5}} - 5 \cdot x^{-\frac{3}{4}}$. Deoarece funcția f este continuă pe $(0, \infty)$, rezultă că ea admite primitive pe $(0, \infty)$ și folosind tabelul primitivelor uzuale avem că

$$\int f(x)\mathrm{d}x = 2\int x^3\mathrm{d}x + 3\int x^{\frac{2}{5}}\mathrm{d}x - 5\int x^{-\frac{3}{4}}\mathrm{d}x =$$

$$= 2 \cdot \frac{x^4}{4} + 3 \cdot \frac{x^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} - 5 \cdot \frac{x^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}} + \mathcal{C} = \frac{1}{2}x^4 + \frac{15}{7}x \cdot \sqrt[5]{x^2} - 20\sqrt[4]{x} + \mathcal{C}.$$

2. Să se arate că funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Soluție

Funcția f este continuă pe $(-\infty, 0)$ și pe $(0,\infty)$. Deoarece $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$, rezultă că f este continuă și în 0. Deci, funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$, rezultă că admite primitive pe $\mathbb{R}$.

3. Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|$ admite primitive pe $\mathbb{R}$ și să se determine $\int f(x)\mathrm{d}x$.

Soluție

Funcția modul este continuă pe $\mathbb{R}$, rezultă că admite primitive pe $\mathbb{R}$. Funcția f se scrie sub forma $f(x)=\begin{cases} -x, & \text{dacă} \quad x\in(-\infty,0) \\ x, & \text{dacă} \quad x\in[0,\infty) \end{cases}$. Integrând și considerând funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\begin{cases} -\dfrac{x^2}{2}, & \text{dacă} \quad (-\infty,0) \\ \dfrac{x^2}{2}, & \text{dacă} \quad x\in[0,\infty) \end{cases}$, se verifică imediat că F este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și că $F'(x)=f(x)$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$. Deci funcția F este o primitivă a funcției f și atunci

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F + \mathcal{C} = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2}, & \text{dacă} \quad x\in(-\infty,\ 0) \\ \dfrac{x^2}{2}, & \text{dacă} \quad x\in[0,\ \infty) \end{cases} + \mathcal{C}.$$

4. Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} e^x, & \text{dacă} \quad x\in(-\infty,0] \\ x+1, & \text{dacă} \quad x\in(0,\infty] \end{cases}$ admite primitive pe $\mathbb{R}$ și să se determine o primitivă a funcției f.

Soluție

Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = f(0) = 1$, rezultă că funcția f este continuă în 0.

Cum funcția f este continuă pe $(-\infty, 0)$, în 0 și pe $(0,\infty)$, rezultă că este continuă pe $\mathbb{R}$, deci admite primiteive pe $\mathbb{R}$. Prin integrare, obținem că funcțiile $F_1(x)=e^x$ și respectiv $F_2(x)=\dfrac{x^2}{2}+x$ sunt primitive pe $(-\infty, 0)$ și respectiv $(0,\infty)$ pentru funcția f.

Căutăm o primitivă F pe $\mathbb{R}$ pentru funcția f de forma

$$F(x)=\begin{cases} F_1(x)+c_1, & \text{dacă} \quad x\in(-\infty,0] \\ F_2(x)+c_2, & \text{dacă} \quad x\in(0,\infty) \end{cases} =$$

$$=\begin{cases} e^x+c_1, & \text{dacă} \quad x\in(-\infty,\ 0] \\ \dfrac{x^2}{2}+x+c_2, & \text{dacă} \quad x\in(0,\ \infty) \end{cases}.$$

Funcția F fiind o primitivă a funcției f, este derivabilă în 0, de unde rezultă că este continuă în 0. Din condiția de continuitate în 0 avem că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} F(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x) = F(0)$, de unde $1 + c_1 = c_2$.

Considerând $c_1 = 0$, deci $c_2 = 1$ și obținem funcția

$$F(x) = \begin{cases} e^x, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0] \\ \dfrac{x^2}{2} + x + 1, & \text{dacă } x \in (0, \infty) \end{cases}$$

Arătăm că funcția F este o primitivă a funcției f. Avem că F este derivabilă pe $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ și $F'(x) = f(x)$, $\forall\ x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Pe de altă parte $F_s'(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ și

$F_d'(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\frac{x^2}{2} + x + 1 - 1}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\dfrac{x}{2} + 1\right) = 1$, de unde rezultă $F_s'(0) = F_d'(0)$, adică funcția F este derivabilă în 0. Cum $F'(0) = 1$ și $f(0) = 1$, obținem că $F'(0) = f(0)$. Din cele demonstrate mai sus, rezultă că funcția F este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $F'(x) = f(x)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, deci funcția F este o primitivă a funcției f.

§1.4. Metoda integrării prin părți

În paragraful §1.3, am văzut că integrala unei sume de funcții este egală cu suma integralelor. Acum, ne punem problema de a calcula integrala produsului a două funcții. În cazul în care este vorba de produsul dintre o funcție și derivata altei funcții, răspunsul este dat de metoda integrării prin părți.

Folosind formula de derivare a produsului a două funcții derivabile și rezultatul că orice funcție continuă pe un interval admite primitive pe acel interval, obținem teorema următoare:

Teoremă

(Formula integrării prin părți). Dacă funcțiile $f, g : I \to \mathbb{R}$ sunt derivabile pe I, cu derivatele continue pe I, atunci funcțiile $f'g$ și fg' admit primitive pe I și are loc egalitatea

$$\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f \cdot g - \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

Demonstrație. Deoarece funcțiile f și g sunt derivabile pe I, rezultă că produsul lor, funcția $f \cdot g$, este o funcție derivabilă pe I și are loc egalitatea $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$, de unde $f \cdot g' = (f \cdot g)' - f' \cdot g$. Cum funcțiile f, f', g, g' sunt continue pe I, rezultă că funcțiile $f \cdot g'$, $f' \cdot g$ sunt continue pe I și avem că $\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x = \int [f(x)g(x)]'\mathrm{d}x - \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x$. Dar $\int [f(x)g(x)]'\mathrm{d}x = f \cdot g + \mathcal{C}$, deci $\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f \cdot g + \mathcal{C} - \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x = f \cdot g - \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x$, adică concluzia teoremei.

Observație

Schematic, formula de integrare prin părți se scrie

$$\int fg' = f \cdot g - \int f'g .$$

PROBLEME REZOLVATE

1. Să se calculeze integralele

a) $\int x \ln x \,\mathrm{d}x$, $x \in (0, \infty)$;

b) $\int x \cos x \,\mathrm{d}x$, $x \in \mathbb{R}$;.

c) $\int x^2 \sin x \,\mathrm{d}x$, $x \in \mathbb{R}$.

Soluție

a) Considerăm f, $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$, $g'(x) = x$, de unde $g(x) = \dfrac{x^2}{2}$.

Aplicând metoda integrării prin părți, avem

$$\int x \ln x \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + \mathcal{C} .$$

b) Luăm $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $g'(x) = \cos x$, de unde $g(x) = \sin x$, deci

$$\int x \cos x \mathrm{d}x = x \sin x - \int \sin x \mathrm{d}x = x \sin x + \cos x + \mathcal{C} .$$

c) Luăm f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $g'(x) = \sin x$, de unde $g(x) = -\cos x$. Atunci $\int x^2 \cdot \sin x \mathrm{d}x = -x^2 \cdot \cos x + \int 2x \cos x \mathrm{d}x = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \mathrm{d}x$ și ținând seama de b), avem